Ключевые слова:
индивидуальный риск, коллективный риск, корреляция, энтропия рынка, мера устойчивости

***В. А. Горелик**, д. ф.-м. н.,*
проф., вед. науч. сотр. Вычислительного центра им. А. А. Дородницына РАН
*(**e-mail: vgor16@mail.ru**)*
***Т. В. Золотова**, д. ф.-м. н.,*
доц., проф. кафедры «Прикладная математика» ГУМФ
*(**e-mail: tgold11@mail.ru**)*

Оценка корреляции доходности инвестиционных портфелей и устойчивость фондового рынка

В настоящее время существует множество методов оценки индивидуального риска в различных сферах деятельности[1]. Однако общие математические методы исследования коллективного риска до сих пор не разработаны. Под коллективным риском в данном случае понимается непредсказуемость состояния некоторой системы (фондового рынка) в результате определенного поведения коллектива/группы лиц (инвесторов). При этом поведение инвесторов на фондовом рынке предполагает принятие ими решения о составе своих портфелей ценных бумаг.

Известно, что доходности ценных бумаг на фондовом рынке — взаимосвязанные случайные величины, и мерой, определяющей их взаимосвязь, служит ковариация (или корреляционный момент[2]) доходностей. Однако портфель инвестора (азартного, избегающего риска или нейтрального к нему) диверсифицирован, т. е. состоит из множества ценных бумаг различного типа, причем хеджирование риска происходит за счет отрицательной коррелированности доходностей входящих в него финансовых инструментов. Интересный вопрос: как при этом коррелированы случайные величины доходностей портфелей инвесторов с разными коэффициентами риска.

---

[1] *См., например: Горелик В. А. Критерии оценки и оптимальности риска в сложных организационных системах / В. А. Горелик, Т. В. Золотова. — М.: ВЦ РАН, 2009; Шарп У. Инвестиции / У. Шарп, Г. Александер, Дж. Бейли; пер. с англ. А. Н. Буренина, А. А. Васина. — М.: ИНФРА-М, 2004; Markowitz H. M. Portfolio selection // Journal of Finance. — 1952. — № 7. — P. 77–91.*

[2] *См.: Вентцель Е. С. Исследование операций / Е. С. Вентцель. — М.: Высшая школа, 2007.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОСТАВА ОПТИМАЛЬНОГО ПОЛНОРАЗМЕРНОГО ПОРТФЕЛЯ ИНВЕСТОРА

Задачи оценки корреляции доходностей различных портфелей ранее не рассматривались, им и посвящено данное исследование. Изучение этого вопроса важно при прогнозировании такого поведения инвесторов на фондовом рынке, при котором доходности их портфелей будут меняться в одну сторону, т. е. при прогнозировании коллективного риска и, как следствие, развития экономической ситуации в результате такого функционирования рынка.

Одна из наиболее известных моделей хеджирования несистематического риска на финансовом рынке, связанного с поведением конкретного вида финансовых инструментов, — модель «математическое ожидание — дисперсия», впервые предложенная Г. Марковицем[3]. В основе этой модели рынка лежит предположение, что теоретически существует вероятностное распределение n-мерного вектора случайных величин доходностей r_i финансовых инструментов на фондовом рынке. Практически на основании статистических данных за T предшествующих периодов имеются оценки математических ожиданий $\bar{r}_i$ и корреляционных моментов σ_{ij} случайных величин r_i доходностей финансовых инструментов ($i, j = 1, ..., n$). Будем считать, что фондовый рынок характеризуется вектором математических ожиданий доходностей финансовых инструментов

$\bar{r} = (\bar{r}_1, ..., \bar{r}_i, ..., \bar{r}_n)$ и ковариационной матрицей $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & ... & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & ... & \sigma_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & ... & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$.

Это объективная информация, доступная исследователю (биржевому аналитику). Инвесторы могут при принятии решений использовать ее или руководствоваться своей собственной, субъективной информацией. Предполагается, что все инвесторы основывают свое поведение на единой объективной информации. Различие между ними заключается в отношении к риску, выражающемся величиной коэффициента в целевой функции, которая представляет собой линейную свертку двух критериев — математического ожидания и дисперсии случайных доходностей портфелей (формализация свертки дается ниже).

Рассмотрим индивидуальное поведение инвестора, где вектор x — управление портфелем инвестиций, а компоненты x_i — доли средств, вкладываемых в финансовые инструменты или проекты из конечного списка ($i = 1, ..., n$). Определим оптимальный портфель как решение задачи на экстремум линейной свертки двух критериев «математическое ожидание — дисперсия»:

$$\max_{x \in X}[\alpha \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i - (1 - \alpha) \sum_{i, j = 1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j], \qquad (1)$$

где $X = \{x \mid x_i \geq 0,\ i = 1, ..., n, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$,

$\alpha \in (0; 1)$ — весовой коэффициент, определяющий важности критериев (коэффициент риска). Как известно, ковариационная матрица σ неотрицательно определена, поэтому (1) — задача выпуклого программирования[4].

---

[3] См.: Markowitz H. M. Portfolio selection // Journal of Finance. — 1952. — № 7. — P. 77–91.

[4] См.: Вентцель Е. С. Исследование операций / Е. С. Вентцель. — М.: Высшая школа, 2007.

Задача выбора оптимального портфеля (1) предполагает отсутствие коротких продаж, безрискового заимствования и кредитования. Возможность коротких продаж в формулировке задачи (1) выражается отсутствием условия неотрицательности $x_i \geq 0$, $i = 1, ..., n$ на все переменные или на их часть; для безрискового заимствования и кредитования характерно наличие в (1) переменной с точно известной доходностью и соответственно нулевыми дисперсией и ковариациями.

Отметим, что выбор линейной свертки критериев «математическое ожидание — дисперсия» для нахождения оптимального портфеля не уменьшает общности рассмотрения. В силу выпуклости множества эффективных портфелей[5] изменение коэффициента риска $\alpha \in (0; 1)$ в линейной свертке дает возможность получить все множество эффективных (оптимальных по Парето[6]) портфелей. Любые другие принципы оптимального выбора (функции полезности в пространстве двух критериев «математическое ожидание — дисперсия», другие свертки этих критериев, перевод одного критерия в ограничение) приводят к одному из эффективных портфелей, соответствующему определенному $\alpha \in (0; 1)$ в задаче (1).

Отметим также, что отклонение действительной доходности от ожидаемой может происходить как в отрицательную, так и в положительную сторону. В последнем случае такое отклонение не является неудовлетворительным фактором. Это общеизвестный недостаток выбора дисперсии в качестве оценки несистематического риска портфеля. Однако другие оценки риска портфеля либо аналогичны данной (например, использование «полудисперсии» как меры отклонения в отрицательную сторону для симметричного распределения вероятности эквивалентно уменьшению коэффициента риска вдвое), либо обладают иными известными недостатками. Дисперсия же наиболее удобная с математической точки зрения и распространенная на практике форма оценки риска.

Будем называть портфель полноразмерным, если у составляющего его вектора x все компоненты отличны от нуля. Далее нам понадобится формула для определения полноразмерного оптимального портфеля инвестора.

Функция Лагранжа[7] для задачи (1) имеет вид

$$L(x, \lambda) = \alpha\sum_{i=1}^{n}\bar{r}_i x_i - (1-\alpha)\sum_{i,j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j + \lambda\Big(1 - \sum_{i=1}^{n}x_i\Big).$$

Условия оптимальности полноразмерного портфеля приводят к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\alpha\bar{r}_i - 2(1-\alpha)\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_j^0 - \lambda = 0,\ i = 1, ..., n,\ \sum_{j=1}^{n}x_j^0 = 1. \qquad (2)$$

Представим систему (2) в виде

$$\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_j^0 + \frac{\lambda}{2(1-\alpha)} = \frac{\alpha}{2(1-\alpha)}\bar{r}_i,\ i = 1, ..., n,\ \sum_{j=1}^{n}x_j^0 = 1. \qquad (3)$$

---

[5] См.: Шарп У. Инвестиции / У. Шарп, Г. Александер, Дж. Бейли; пер. с англ. А. Н. Буренина, А. А. Васина. — М.: ИНФРА-М, 2004.

[6] См.: Белолипецкий А. А. Экономико-математические методы / А. А. Белолипецкий, В. А. Горелик. — М.: Издательский центр «Академия», 2010.

[7] Там же.

Система (3) эквивалентна матричному уравнению

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \dots \\ x_n^0 \\ \dfrac{\lambda}{2(1-\alpha)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha \bar{r}_1}{2(1-\alpha)} \\ \dots \\ \dfrac{\alpha \bar{r}_n}{2(1-\alpha)} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения $\bar{r} = (\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n)$, $\beta = \dfrac{\alpha}{2(1-\alpha)}$, $\beta \in (0; \infty)$. Тогда система (3) примет вид

$$\sigma x^0 + \frac{\lambda}{2(1-\alpha)} e = \beta \bar{r},\ x^0 e = 1. \tag{4}$$

Если σ невырождена, то оптимальный состав полноразмерного портфеля при фиксированном параметре α (или β), найденный из системы (4), вычисляется по формуле

$$x^0(\beta) = \frac{\sigma^{-1} e}{e\sigma^{-1} e} + \left(\sigma^{-1}\bar{r} - \frac{e\sigma^{-1}\bar{r}}{e\sigma^{-1}e}\sigma^{-1}e\right)\beta$$ [8].

Таким образом, состав полноразмерного оптимального портфеля можно представить в виде

$$x^0(\beta) = C_0 + C_1\beta, \tag{5}$$

где $C_0 = (C_{01}, \dots, C_{0j}, \dots, C_{0n})$, $C_1 = (C_{11}, \dots, C_{1j}, \dots, C_{1n})$ определяются по формулам

$$C_0 = \frac{\sigma^{-1} e}{e\sigma^{-1} e},\ C_1 = \sigma^{-1}\bar{r} - \frac{e\sigma^{-1}\bar{r}}{e\sigma^{-1}e}\sigma^{-1}e. \tag{6}$$

Здесь и далее мы не делаем различия в обозначении вектора-строки и вектора-столбца, считая их соответствующими требованиям операций умножения матриц и векторов.

ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ЗАВИСИМОСТИ ДОХОДНОСТЕЙ ОПТИМАЛЬНЫХ ПОРТФЕЛЕЙ

Доходность любого портфеля x есть случайная величина вида $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$. Вычислим корреляционные моменты (ковариации) доходностей оптимальных портфелей двух инвесторов с различным отношением к риску, выражающимся в различных значениях коэффициентов α. Как говорилось выше, здесь вектор математических ожиданий доходностей $\bar{r} = (\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n)$ и ковариационная матрица σ едины для всех инвесторов.

Сначала вычислим ковариацию $\mathrm{cov}(x^1, x^2)$ доходностей двух произвольных (неоптимальных) портфелей, имеющих составы x^1 и x^2 (здесь и далее верхние индексы показывают номера портфелей, а нижние — номера компонент этих портфелей). Пусть M означает математическое ожидание случайной величины, r_x — доходность портфеля, принимающую случайные значения; $\bar{r}_x$ — ожидаемую доходность портфеля.

[8] *См.: Горелик В. А. Модели оценки коллективного и системного риска / В. А. Горелик, Т. В. Золотова. — М.: ВЦ РАН, 2011.*

По определению ковариации, учитывая представления случайных величин в едином n-мерном пространстве, получаем

$$\mathrm{cov}(x^1, x^2) = \mathrm{M}[(r_{x^1} - \bar{r}_{x^1})(r_{x^2} - \bar{r}_{x^2})] =$$
$$= \mathrm{M}[(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i^1 - \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i^1)(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i^2)] = \mathrm{M}[\sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r}_i)x_i^1 \sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r}_i)x_i^2] =$$
$$= \mathrm{M}[\sum_{i,j=1}^{n}(r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)x_i^1 x_j^2] = \sum_{i,j=1}^{n}\mathrm{M}[(r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)x_i^1 x_j^2] = \sum_{i,j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i^1 x_j^2.$$

Таким образом, ковариация случайных величин доходностей двух произвольных портфелей вычисляется через составы этих портфелей по формуле

$$\mathrm{cov}(x^1, x^2) = x^1 \sigma x^2. \tag{7}$$

Отметим, что ковариация доходностей двух произвольных портфелей вычисляется с использованием объективной ковариационной матрицы σ, характеризующей рынок, т. е. по формуле (7), независимо от того, какой субъективной информацией пользуются инвесторы при формировании своих портфелей.

Теорема 1. Если определитель ковариационной матрицы $\det \sigma \neq 0$, то ковариация $\mathrm{cov}(x^{01}, x^{02})$ двух полноразмерных оптимальных портфелей положительна (здесь и далее под x^1, x^2 следует понимать составы двух произвольных портфелей, а под x^{01}, x^{02} — двух оптимальных). Если дополнительно ковариационная матрица σ строго положительно определена, то ковариация любых двух оптимальных портфелей положительна[9].

В следующих примерах 1 и 2 показано, что если хотя бы один инвестор имеет неоптимальный портфель, то ковариация таких портфелей может быть отрицательной.

Пример 1 (один портфель неоптимальный). Имеются три ценные бумаги со следующими характеристиками: $\bar{r}_1 = 15$, $\bar{r}_2 = 25$, $\bar{r}_3 = 26$, $\sigma_1^2 = 10$, $\sigma_2^2 = 20$, $\sigma_3^2 = 30$, $\sigma_{12} = -5$, $\sigma_{13} = -10$, $\sigma_{23} = -5$. Параметр β для первого портфеля имеет значение $\beta_1 = 1$, а для второго — $\beta_2 = 0{,}25$. Согласно (5) составы оптимальных портфелей и ковариация между этими портфелями соответственно $x^{01} = (0{,}19;\ 0{,}44;\ 0{,}37)$, $x^{02} = (0{,}4225;\ 0{,}2975;\ 0{,}28)$, $\mathrm{cov}(x^{01}, x^{02}) = 2{,}055$. Коэффициент корреляции $\rho_{x^{01}x^{02}}$ между портфелями x^{01} и x^{02} — 0,807.

Пусть второй портфель неоптимален и имеет, например, структуру $x^2 = (0{,}7;\ 0{,}2;\ 0{,}1)$. Тогда ковариация между первым оптимальным и вторым неоптимальным портфелями $\mathrm{cov}(x^{01}, x^2) = -0{,}9$. Коэффициент корреляции $\rho_{x^{01}x^2}$ между портфелями x^{01} и x^2 — $-0{,}246$.

Пример 2 (два портфеля неоптимальные). Имеются три ценные бумаги со следующими характеристиками: $\bar{r}_1 = 15$, $\bar{r}_2 = 25$, $\bar{r}_3 = 26$, $\sigma_1^2 = 10$, $\sigma_2^2 = 20$, $\sigma_3^2 = 30$, $\sigma_{12} = 5$, $\sigma_{13} = -10$, $\sigma_{23} = 5$. Параметр β для первого и второго портфеля имеет те же значения, что и в примере 1: $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0{,}25$. В результате вычислений составы оптимальных портфелей и ковариация между этими портфелями соответственно $x^{01} = (0{,}25;\ 0{,}35;\ 0{,}40)$, $x^{02} = (0{,}621;\ 0;\ 0{,}379)$, $\mathrm{cov}(x^{01}, x^{02}) = 4{,}421$. При этом коэффициент корреляции $\rho_{x^{01}x^{02}}$ между портфелями x^{01} и x^{02} — 0,833.

Пусть оба портфеля неоптимальны и имеют, например, структуры $x^1 = (0{,}4;\ 0;\ 0{,}6)$, $x^2 = (0{,}9;\ 0{,}05;\ 0{,}05)$. Тогда ковариация между первым и вторым неоптимальными

[9] *Доказательство теоремы 1 не приводится в данной статье по причине большого объема. Подробнее см.: Горелик В. А. Модели оценки коллективного и системного риска / В. А. Горелик, Т. В. Золотова. — М.: ВЦ РАН, 2011.*

портфелями $\mathrm{cov}(x^1, x^2) = -0{,}85$. Коэффициент корреляции $\rho_{x^1x^2}$ между портфелями x^1 и x^2 составляет $-0{,}11$.

Замечание 1. При наличии коротких продаж имеет место тот же результат, но доказательство его проще. В этом случае отсутствует условие неотрицательности вектора x и состав оптимального портфеля определяется согласно (5) и (6), а из теоремы 1 для полноразмерных оптимальных портфелей следует, что корреляция оптимальных портфелей с короткими продажами положительна.

Замечание 2. Вопрос выбора оптимального портфеля с безрисковым кредитом или безрисковым займом требует отдельного рассмотрения, т. к. приводит к другой структуре оптимального портфеля и другой технике проведения доказательств, но свойство положительности корреляции оптимальных портфелей сохраняется.

УСЛОВИЕ ПОЛНОРАЗМЕРНОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ И ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ

Теорема 2. Если определитель ковариационной матрицы $\det\sigma \neq 0$, то, для того чтобы оптимальный портфель x^0 был полноразмерным, необходимо и достаточно, чтобы коэффициент β находился в интервале, определяемом неравенством

$$\max\{0; \max_{j|C_{1j}>0} \frac{-C_{0j}}{C_{1j}}\} < \beta < \min_{j|C_{1j}<0} \frac{-C_{0j}}{C_{1j}}, \tag{8}$$

где $C_0 = (C_{01}, ..., C_{0j}, ..., C_{0n})$, $C_1 = (C_{11}, ..., C_{1j}, ..., C_{1n})$ вычисляются по формулам (6). При этом коэффициент корреляции двух полноразмерных портфелей x^{01} и x^{02}

$$\rho_{x^{01}x^{02}} = \frac{C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\beta_1\beta_2}{(C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\beta_1^2)^{1/2}(C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\beta_2^2)^{1/2}},$$

монотонно убывает с ростом величины $\delta = \beta_1 - \beta_2$ и принимает значения из интервала $(a; 1]$, где

$$a = \frac{C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\min\limits_{j|C_{1j}<0}\frac{-C_{0j}}{C_{1j}}\max\{0; \max\limits_{j|C_{1j}>0}\frac{-C_{0j}}{C_{1j}}\}}{(C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\min\limits_{j|C_{1j}<0}\frac{-C_{0j}}{C_{1j}})^{1/2}(C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\max\{0; \max\limits_{j|C_{1j}>0}\frac{-C_{0j}}{C_{1j}}\})^{1/2}} > 0.$$

Доказательство. Неравенства $x_j^0(\beta) = C_{0j} + C_{1j}\beta > 0$, $j = 1, ..., n$ (условие полноразмерности оптимального портфеля) имеют место при следующих ограничениях на параметр β: если $C_{1j} > 0$, то $\beta > -\frac{C_{0j}}{C_{1j}}$; если $C_{1j} < 0$, то обязательно $C_{0j} > 0$ и $0 < \beta < -\frac{C_{0j}}{C_{1j}}$. Значит, для тех $j \in \{1, ..., n\}$, для которых $C_{1j} > 0$, имеем условие $\beta > \max\limits_{j|C_{1j}>0}\frac{-C_{0j}}{C_{1j}}$, а для тех $j \in \{1, ..., n\}$, для которых $C_{1j} < 0$, имеем условие $\beta < \min\limits_{j|C_{1j}<0}\frac{-C_{0j}}{C_{1j}}$. Так как эти два условия относятся к разным индексам, для полноразмерного портфеля выполняются они оба. Учитывая, что $\beta \geq 0$, имеем ограничение на значение параметра β в виде (8).

По теореме 1 имеем $\rho_{x^{01}x^{02}} \in (0; 1]$. При $\beta_1 = \beta_2$ получаем два одинаковых портфеля, и формула (7) дает дисперсию портфеля. Для первого оптимального портфеля дисперсия имеет вид $\sigma_{x^{01}} = (C_0\sigma C_0) + (C_1\sigma C_1)\beta_1^2$, а для второго — $\sigma_{x^{02}} = (C_0\sigma C_0) + (C_1\sigma C_1)\beta_2^2$.

Тогда коэффициент корреляции

$$\rho_{x^{01}x^{02}} = \frac{C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\beta_1\beta_2}{(C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\beta_1^2)^{1/2}(C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\beta_2^2)^{1/2}}.$$

Нетрудно заметить, что $\rho_{x^{01}x^{02}} = 1$ при $\beta_1 = \beta_2$. Для доказательства монотонности убывания $\rho_{x^{01}x^{02}}$ при увеличении $\delta = \beta_1 - \beta_2$ проведем следующие преобразования:

$$\rho^2_{x^{01}x^{02}} = \frac{(C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\beta_1\beta_2)^2}{(C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\beta_1^2)(C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\beta_2^2)} =$$

$$= \frac{(C_0\sigma C_0)^2 + 2(C_0\sigma C_0)(C_1\sigma C_1)\beta_1\beta_2 + (C_1\sigma C_1)^2\beta_1^2\beta_2^2}{(C_0\sigma C_0)^2 + (C_0\sigma C_0)(C_1\sigma C_1)(\beta_1^2 + \beta_2^2) + (C_1\sigma C_1)^2\beta_1^2\beta_2^2}.$$

При этом $\rho^2_{x^{01}x^{02}} \leq 1$ и

$$1 - \rho^2_{x^{01}x^{02}} = \frac{(C_0\sigma C_0)(C_1\sigma C_1)(\beta_1 - \beta_2)^2}{(C_0\sigma C_0)^2 + (C_0\sigma C_0)(C_1\sigma C_1)(\beta_1^2 + \beta_2^2) + (C_1\sigma C_1)^2\beta_1^2\beta_2^2}.$$

Фиксируя β_2, получаем $\beta_1 = \beta_2 + \delta$. Тогда

$$1 - \rho^2_{x^{01}x^{02}} = \frac{(C_0\sigma C_0)(C_1\sigma C_1)\delta^2}{(C_0\sigma C_0)^2 + (C_0\sigma C_0)(C_1\sigma C_1)(2\beta_2^2 + 2\beta_2\delta + \delta^2) + (C_1\sigma C_1)^2\beta_2^2(\beta_2^2 + 2\beta_2\delta + \delta^2)} \text{ или}$$

$$1 - \rho^2_{x^{01}x^{02}} = \frac{(C_0\sigma C_0)(C_1\sigma C_1)\delta^2}{A + B\delta + C\delta^2} = \frac{(C_0\sigma C_0)(C_1\sigma C_1)}{A\delta^{-2} + B\delta^{-1} + C},$$

где $A = (C_0\sigma C_0)^2 + (C_0\sigma C_0)(C_1\sigma C_1)2\beta_2^2 + (C_1\sigma C_1)^2\beta_2^4$;
$B = (C_0\sigma C_0)(C_1\sigma C_1)2\beta_2 + (C_1\sigma C_1)^2 2\beta_2^3$;
$C = (C_0\sigma C_0)(C_1\sigma C_1) + (C_1\sigma C_1)^2\beta_2^2$.

Следовательно, при росте δ величина $1 - \rho^2_{x^{01}x^{02}} = \dfrac{(C_0\sigma C_0)(C_1\sigma C_1)}{A\delta^{-2} + B\delta^{-1} + C}$, монотонно возрастает, а $\rho_{x^{01}x^{02}}$, соответственно, монотонно убывает. Учитывая условие полноразмерности портфеля [см. (8)], имеем

$$a = \lim_{\substack{\beta_1 \to \min\limits_{j|C_{1j}<0} \frac{-C_{0j}}{C_{1j}} \\ \beta_2 \to \max\{0;\ \max\limits_{j|C_{1j}>0} \frac{-C_{0j}}{C_{1j}}\}}} \rho_{x^{01}x^{02}} = \frac{C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\min\limits_{j|C_{1j}<0}\dfrac{-C_{0j}}{C_{1j}}\max\{0;\ \max\limits_{j|C_{1j}>0}\dfrac{-C_{0j}}{C_{1j}}\}}{(C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\min\limits_{j|C_{1j}<0}\dfrac{-C_{0j}}{C_{1j}})^{1/2}(C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\max\{0;\ \max\limits_{j|C_{1j}>0}\dfrac{-C_{0j}}{C_{1j}}\})^{1/2}}.$$

Значит, коэффициент корреляции $\rho_{x^{01}x^{02}}$ принадлежит интервалу (a; 1], что и требовалось доказать.

Используя данные примеров 1 и 2 (ожидаемые доходности, дисперсии и ковариации трех ценных бумаг), найдем интервалы значений коэффициента β, при которых оптимальные портфели инвесторов полноразмерны.

Пример 3 (расчет коэффициента β в примере 1). Согласно формулам (6) имеем C_0 = (0,5; 0,25; 0,25), C_1 = (−0,31; 0,19; 0,12). По формуле (8) получаем $\max\{0; \max\{\frac{-0,25}{0,19}, \frac{-0,25}{0,12}\}\} = 0$, $\min\frac{-0,5}{-0,31} = 1,613$. Тогда при условии $0 \le \beta \le 1,613$, т. е. когда коэффициент риска α принимает значения из интервала $0 \le \alpha \le 0,763$, оптимальный портфель инвестора в примере 1 полноразмерен. Это подтверждают выбранные в примере 1 значения $\beta_1 = 1$ и $\beta_2 = 0,25$.

Пример 4 (расчет коэффициента β в примере 2). Аналогично по формулам (6) имеем C_0 = (0,75; −0,125; 0,375), C_1 = (−0,5; 0,475; 0,025). По формуле (8) получаем $\max\{0; \max\{\frac{0,125}{0,475}, \frac{-0,375}{0,025}\}\} = 0,263$, $\min\frac{-0,75}{-0,5} = 1,5$. Тогда при условии $0,263 \le \beta \le 1,5$, т. е. когда коэффициент риска α принимает значения из интервала $0,345 \le \alpha \le 0,75$, оптимальный портфель инвестора в примере 2 полноразмерен. Это также подтверждают выбранные значения: при $\beta_1 = 1$ в примере 2 был получен полноразмерный портфель, а при $\beta_2 = 0,25$ — неполноразмерный.

Таким образом, оптимальный портфель включает все финансовые инструменты, присутствующие на рынке, только если коэффициент риска β находится в сравнительно небольшом диапазоне. Теорема 2 определяет границы этого диапазона.

ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ РЫНКА

Как вытекает из результатов анализа, доходности оптимальных портфелей положительно коррелированы, причем чем ближе друг к другу значения коэффициентов α инвесторов, т. е. сходно их отношение к риску, тем ближе к единице коэффициенты корреляции их портфелей. Строго математически доказано, что наличие бумаг с отрицательной корреляцией и индивидуальный выбор оптимальных портфелей с любым коэффициентом риска обязательно приводят к положительной корреляции портфелей. Это один из факторов неустойчивости (или риска) рынка. Так как инвесторы не обязаны вести себя на фондовом рынке оптимально [согласно (1)], их портфели могут быть коррелированы как положительно, так и отрицательно. Таким образом, однотипное поведение инвесторов (формирование оптимальных портфелей) может вызывать большие колебания рынка, а разнотипное гасит колебания рынка, т. е. хеджирует коллективный риск.

Поэтому для оценки и прогнозирования коллективного риска имеет смысл ввести меру разнообразия портфелей. В качестве такой меры естественно использовать понятие энтропии системы. Для ее определения разобьем множество портфелей на некоторое число классов k. В качестве априорных представителей каждого класса выберем оптимальные портфели для некоторого диапазона значений параметра α. Например, пять классов портфелей: очень осторожные ($0 \le \alpha < 0,2$), осторожные ($0,2 \le \alpha < 0,4$), умеренные ($0,4 \le \alpha < 0,6$), рискованные ($0,6 \le \alpha < 0,8$), очень рискованные ($0,8 \le \alpha \le 1$). Отметим, что для выбранного принципа разбиения портфелей в рассмотренных выше примерах оптимальный портфель включает все три ценные бумаги, если коэффициент риска α для примера 3 находится в диапазоне значений, соответствующих портфелям от очень осторожных до рискованных, и для примера 4 — от осторожных до рискованных.

В каждом диапазоне значений α определим составы некоторого количества (порядка десяти) оптимальных портфелей с равным шагом изменения этого параметра. Для реально существующих в системе портфелей инвестиций значения α неизвестны, да и построены они могут быть на основании других принципов поведения. Однако с той или иной степенью точности составы портфелей могут быть оценены (например, на основе анализа информации о сделках купли-продажи и решения обратной задачи инвестирования). Поэтому используем пространство *X* как признаковое, определим в нем меру близости, например среднеквадратическое расстояние портфеля от всех представителей данного класса, и будем относить каждый портфель к ближайшему классу. После разбиения на классы найдем доли реальных портфелей от их общего числа в каждом классе q_i, $i = 1, \ldots, k$. Тогда энтропия системы $H = -\sum_{i=1}^{k} q_i \log q_i$ (основание логарифма может выражаться любым числом больше 1, но наиболее употребимо основание, равное 2[10]). В качестве меры устойчивости конкретной системы можно взять отношение ее энтропии к максимальному значению энтропии $\log k$[11]. Чем больше значение этого отношения (ближе к 1), тем больше разнообразие портфелей и меньше коллективный риск.

Теоретической основой ряда различных методов, применяемых в инвестиционной практике, служит модель оценки финансовых активов (Capital Asset Pricing Model — CAPM)[12], ее расширенные и модифицированные версии. В модели CAPM тоже исследуется коллективное поведение инвесторов (все инвесторы будут поступать одинаково) и определяется структура оптимального портфеля каждого инвестора на основе решения задачи (1). При этом предполагается, что фондовый рынок будет находиться в положении равновесия, т. е. прекратятся все колебания курсов ценных бумаг. Естественно, что до наступления состояния равновесия имеются колебания курсов, и они могут оказаться значительными.

В отличие от исследований, основанных на модели CAPM, в настоящей работе рассматриваются вопросы минимизации колебаний курсов ценных бумаг до того, как рынок займет положение равновесия, т. е. вопросы снижения коллективного риска в момент переходного процесса на фондовом рынке. При отрицательной корреляции портфелей колебания рынка гасятся автоматически, и он возвращается в прежнее положение равновесия. При положительной корреляции переход в новое равновесие происходит за счет сделок купли-продажи и соответствующих изменений цен. Но в зависимости от характера переходных процессов (скорости, амплитуды) могут возникнуть значительные колебания рынка, а в поведении инвесторов — известный в теории игр «эффект толпы»[13] (например, массовый переход в кэш), что может привести (как и было недавно) к обвалу. Поэтому положительная корреляция — один из существенных факторов неустойчивости.

Одним из возможных сценариев развития ситуации может быть присутствие на рынке арбитражеров, которые не поддерживают долговременные портфели, а покупают ценные бумаги, когда их рыночная стоимость становится ниже справедливой цены, с целью последующей продажи инвесторам, оставшимся на рынке и выходящим с него. Другая ситуация, когда акции служат обеспечением кредита и при падении их стоимости даже без продажи возникают требования к новому обеспечению или их передаче (так было недавно с российскими компаниями и зарубежными банками). Если таких инвесторов много, то возникает угроза дефолта.

---

[10] *См.: Вентцель Е. С. Исследование операций / Е. С. Вентцель. — М.: Высшая школа, 2007.*

[11] *Там же.*

[12] *См.: Шарп У. Инвестиции / У. Шарп, Г. Александер, Дж. Бейли; пер. с англ. А. Н. Буренина, А. А. Васина. — М.: ИНФРА-М, 2004.*

[13] *См.: Белолипецкий А. А. Экономико-математические методы / А. А. Белолипецкий, В. А. Горелик. — М.: Издательский центр «Академия», 2010.*

Наличие безрискового актива (если только сам портфель не безрисковый, т. е. коэффициент α стремится к нулю) принципиально картину не меняет.

Таким образом, справедлив интересный и, на наш взгляд, неожиданный результат: несмотря на возможное наличие компонент портфеля с отрицательными ковариациями, обеспечивающих хеджирование риска для индивидуального инвестора, положительно коррелированы не только полноразмерные оптимальные портфели, соответствующие сравнительно узкому диапазону значений α, но и любые оптимальные портфели со сколь угодно различающимся отношением инвесторов к риску (см. теоремы 1 и 2, примеры 1 и 2).

Предложенные методы могут быть использованы для прогнозирования коллективного риска и принятия соответствующих мер с целью возможного снижения риска для обеспечения устойчивости рынка и экономики в целом. Оценка разнообразия портфелей как мера устойчивости может применяться не только на фондовом рынке, но и, например, в банковском секторе для кредитных портфелей, в сфере страхования и т. д.

Библиография

1. Белолипецкий, А. А. Экономико-математические методы / А. А. Белолипецкий, В. А. Горелик. — М.: Издательский центр «Академия», 2010. — 370 с.
2. Вентцель, Е. С. Исследование операций / Е. С. Вентцель. — М.: Высшая школа, 2007. — 206 с.
3. Горелик, В. А. Критерии оценки и оптимальности риска в сложных организационных системах / В. А. Горелик, Т. В. Золотова. — М.: ВЦ РАН, 2009. — 162 с.
4. Горелик, В. А. Модели оценки коллективного и системного риска / В. А. Горелик, Т. В. Золотова. — М.: ВЦ РАН, 2011. — 163 с.
5. Шарп, У. Инвестиции / У. Шарп, Г. Александер, Дж. Бейли; пер. с англ. А. Н. Буренина, А. А. Васина. — М.: ИНФРА-М, 2004. — 1028 с.
6. Markowitz, H. M. Portfolio selection // Journal of Finance. — 1952. — № 7. — P. 77–91.