***Ключевые слова*:**
*коэффициент корреляции,
коэффициент риска,
средняя ковариация,
устойчивость*

В. А. Горелик, *д. ф.-м. н.,
проф., вед. науч. сотр.
Вычислительного центра им. А. А. Дородницына РАН
(**e-mail: vgor16@mail.ru**)*
Т. В. Золотова, *д. ф.-м. н.,
доц., проф. кафедры «Прикладная математика»
Финансового университета при Правительстве РФ
(**e-mail: tgold11@mail.ru**)*

Критерии устойчивости фондового рынка, их связь с информированностью и принципами поведения инвесторов

Для фондового рынка под коллективным риском понимается непредсказуемость его состояния как результат индивидуального поведения инвесторов. При этом поведение инвесторов на фондовом рынке предполагает принятие ими решения о составе своих портфелей ценных бумаг, а риск связывается с положительной ковариацией доходностей портфелей.

В исследовании[1] был предложен подход к оценке устойчивости сложных систем с использованием понятия коллективного риска, получены оценки риска на фондовом рынке на основе коэффициентов корреляции случайных величин доходностей, проведен анализ коллективного риска на фондовом рынке, рассмотрен вопрос устойчивости рынка с использованием понятия энтропии.

В данной статье рассмотрен ряд новых вопросов, относящихся к этой области. Представлены новые результаты, связанные с учетом возможности инвесторов проводить операции безрискового заимствования, кредитования, коротких продаж. Предлагаются показатели (меры) риска и устойчивости стратегии отдельного инвестора и фондового рынка в целом, проведено исследование рыночной модели на устойчивость с помощью предложенных показателей. В первом разделе кратко представлены полученные нами и опубликованные ранее результаты

[1] *Горелик В. А., Золотова Т. В. Модели оценки коллективного и системного риска. — М.: ВЦ РАН, 2011.*

исследования корреляционной зависимости доходностей инвестиционных портфелей, которые используются в дальнейшем. В последующих разделах исследована корреляционная зависимость доходностей оптимальных портфелей при наличии безрискового заимствования, кредитования, коротких продаж, а также вопросы устойчивости для отдельного инвестора и для фондового рынка в целом.

КОВАРИАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДОХОДНОСТЕЙ ОПТИМАЛЬНЫХ ПОРТФЕЛЕЙ РАЗНЫХ ИНВЕСТОРОВ

В основе рассматриваемой нами модели фондового рынка лежит предположение, что теоретически существует вероятностное распределение n-мерного вектора случайных величин доходностей r_i финансовых инструментов. При этом известно, что доходности являются взаимосвязанными случайными величинами, и мерой, определяющей эту взаимосвязь, служит ковариация (или корреляционный момент[2]) доходностей. Практически на основании статистических данных за T предшествующих периодов имеются оценки математических ожиданий $\bar{r}_i$ и корреляционных моментов σ_{ij} случайных величин r_i доходностей финансовых инструментов, $i, j = 1, \dots, n$. Будем считать, что фондовый рынок характеризуется вектором математических ожиданий доходностей финансовых инструментов $\bar{r} = (\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_i, \dots, \bar{r}_n)$ и ковариационной матрицей $\sigma = (\sigma_{ij})_{n \times n}$. Это объективная информация, доступная исследователю (биржевому аналитику). Инвесторы могут при принятии решений использовать ее или руководствоваться собственной субъективной информацией. Предположим сначала, что инвесторы основывают свое поведение на единой объективной информации. Различие между ними заключается в отношении к риску, выражающемся в величине коэффициента в целевой функции, которая представляет собой линейную свертку двух критериев: математического ожидания и дисперсии случайных доходностей портфелей.

Рассмотрим индивидуальное поведение инвестора, управление которого есть вектор x (портфель инвестиций), компоненты которого x_i — доли средств, вкладываемых в финансовые инструменты из конечного списка ($i = 1, \dots, n$). Определим оптимальный портфель как решение задачи на экстремум линейной свертки критериев математического ожидания доходности портфеля и дисперсии доходности портфеля[3]:

$$\max_{x \in X} \left[\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i - \alpha \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j \right], \qquad (1)$$

где $X = \{x | x_i \geq 0, \text{i} = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$,

$\alpha > 0$ — весовой коэффициент, определяющий отношение инвестора к риску (коэффициент риска). Нетрудно видеть, что задача выбора оптимального портфеля (1) предполагает отсутствие коротких продаж, безрискового заимствования и кредитования (эти случаи рассмотрены далее). Отметим также, что при оценке коллективного риска выбор линейной свертки критериев «математическое ожидание — дисперсия» для нахождения оптимального портфеля не принципиален; любые другие принципы оптимального выбора приводят к одному из эффективных портфелей, соответствующему определенному $\alpha > 0$ в задаче (1)[4].

---

[2] *См.: Вентцель Е. С. Теория вероятностей. — М.: КноРус, 2010.*

[3] *См.: Markowitz, H. M. Portfolio selection // Journal of Finance. — 1952. — № 7. — P. 77–91.*

[4] *Подробнее см.: Горелик В. А., Золотова Т. В. Оценка корреляции доходности инвестиционных портфелей и устойчивость фондового рынка // Государственный университет Минфина России. Финансовый журнал. — 2012. — № 3. — С. 43–52.*

Будем называть портфель полноразмерным, если у составляющего его вектора x все компоненты больше нуля. Решение задачи (1) приведено в работах[5], а именно, состав оптимального полноразмерного портфеля имеет вид

$$x^0(\gamma) = C_0 + C_1\gamma, \tag{2}$$

где $\gamma = \dfrac{1}{2\alpha}$, $\gamma \in (0; \infty)$, $e = (1, \ldots, 1)$, $C_0 = (C_{01}, \ldots, C_{0n})$, $C_1 = (C_{11}, \ldots, C_{1n})$ определяются по формулам $C_0 = \dfrac{\sigma^{-1}e}{e\sigma^{-1}e}$, $C_1 = \sigma^{-1}\bar{r} - \dfrac{\sigma^{-1}e\bar{r}}{e\sigma^{-1}e}\sigma^{-1}e$. Здесь и далее в качестве коэффициента риска используется γ.

Согласно (2), составы оптимальных портфелей x^{01} и x^{02} инвесторов имеют вид $x^{01} = C_0 + C_1\gamma_1$ и $x^{02} = C_0 + C_1\gamma_2$ соответственно.

В работах[6] приведены необходимые и достаточные условия полноразмерности портфеля, показано, что ковариация случайных величин доходностей r_{x^1} и r_{x^2} двух произвольных портфелей, имеющих составы x^1 и x^2, вычисляется через составы этих портфелей по формуле

$$\operatorname{cov}(r_{x^1}, r_{x^2}) = x^1\sigma x^2, \tag{3}$$

и установлено следующее важное свойство: ковариация доходностей любых двух оптимальных портфелей положительна.

Отметим, что ковариация доходностей двух произвольных портфелей вычисляется с использованием объективной ковариационной матрицы σ, характеризующей рынок, т. е. по формуле (3), независимо от того, какой субъективной информацией пользуются инвесторы при формировании своих портфелей.

Традиционно предполагается, что инвесторы одинаково информированы (например, используют объективную информацию) о ситуации на финансовом рынке, и их различное поведение связано с различным отношением к риску (выбор параметра γ). Предположим, что инвесторы обладают различной информированностью (субъективная информация), которая выражается в том, что они по-разному оценивают ожидаемые доходности компонент портфеля (ковариационная матрица считается единой). Рассмотрим двух инвесторов, оптимальные портфели x^{01} и x^{02} которых определены из решения задачи (1) при различных значениях параметра γ и различных значениях ожидаемых доходностей. Пусть первый инвестор имеет вектор ожидаемых доходностей $\bar{r}^1$, а второй — $\bar{r}^2$. Составы оптимальных портфелей x^{01} и x^{02} инвесторов имеют вид

$$x^{01} = C_0 + C_1^1\gamma_1 \text{ и } x^{02} = C_0 + C_1^2\gamma_2 \tag{4}$$

соответственно, где C_1^1 и C_1^2 определяются по формулам

$$C_0 = \frac{\sigma^{-1}e}{e\sigma^{-1}e},\ C_1^1 = \sigma^{-1}\bar{r}^1 - \frac{e\sigma^{-1}\bar{r}^1}{e\sigma^{-1}e}\sigma^{-1}e,\ C_1^2 = \sigma^{-1}\bar{r}^2 - \frac{e\sigma^{-1}\bar{r}^2}{e\sigma^{-1}e}\sigma^{-1}e. \tag{5}$$

[5] *Горелик В. А., Золотова Т. В.* Оценка корреляции доходности инвестиционных портфелей и устойчивость фондового рынка // Государственный университет Минфина России. Финансовый журнал. — 2012. — № 3. — С. 43–52; *Горелик В. А., Золотова Т. В.* Некоторые вопросы оценки корреляции доходностей инвестиционных портфелей // Проблемы управления. — 2011. — № 3. — С. 36–42.

[6] *Там же.*

В исследовании[7] доказан следующий результат: ковариация $\mathrm{cov}(r^1_{x^{01}}, r^2_{x^{02}})$ двух полноразмерных оптимальных портфелей отрицательна для $\bar{r}^1$, $\bar{r}^2$ и σ, удовлетворяющих условию

$$(e\sigma^{-1}\bar{r}^1)(e\sigma^{-1}\bar{r}^2) - (\bar{r}^1\sigma^{-1}\bar{r}^2)(e\sigma^{-1}e) > \frac{1}{\gamma_1\gamma_2}. \tag{6}$$

Условие (6) характеризует степень различия оценок, которая приводит к отрицательной ковариации. При этом предположение о единой оценке ковариационной матрицы не существенно. Различные оценки ковариационной матрицы отразятся на составах их оптимальных портфелей, которые, естественно, и в этом случае могут быть отрицательно коррелированы, изменится лишь вид условия (6).

КОВАРИАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДОХОДНОСТЕЙ ОПТИМАЛЬНЫХ ПОРТФЕЛЕЙ РАЗНЫХ ИНВЕСТОРОВ ПРИ НАЛИЧИИ БЕЗРИСКОВОГО АКТИВА

Предположим, что инвестор имеет возможность инвестировать в безрисковый актив, т. е. осуществлять безрисковое кредитование. Доходность r_0 по безрисковому активу — известная величина, поэтому дисперсия такой доходности равна нулю. Обозначив x_0 долю средств (от своего начального капитала), вкладываемую в безрисковый актив, получаем следующую задачу определения оптимального портфеля:

$$\max_{x\in X_{fL}}[r_0x_0+\sum_{i=1}^{n}\bar{r}_ix_i - \alpha\sum_{i,j=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j], \tag{7}$$

где $X_{fL} = \{x|x_i \geq 0,\ i = 0, 1, \ldots, n, \sum_{i=0}^{n}x_i = 1\}$.

Условия оптимальности полноразмерного портфеля приводят к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\bar{r}_i - 2\alpha\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x^0_j = r_0,\ i = 1, \ldots, n, \sum_{j=1}^{n}x^0_j = 1. \tag{8}$$

Представим систему (8) в виде

$$\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x^0_j = \frac{1}{2\alpha}(\bar{r}_i - r_0),\ i = 1, \ldots, n, \sum_{j=1}^{n}x^0_j = 1. \tag{9}$$

Введем обозначения $\tilde{x}^0 = (x^0_1, \ldots, x^0_n)$, $\Delta\bar{r} = (\bar{r}_1 - r_0, \ldots., \bar{r}_n - r_0)$. Тогда система (9) примет вид

$$\sigma\tilde{x}^0 = \gamma\Delta\bar{r},\ x^0_0 + \tilde{x}^0e = 1. \tag{10}$$

Если σ невырождена (т. е. если $\det\sigma \neq 0$), то из (10) получаем

$$x^0_0 = 1 - \gamma(\sigma^{-1}\Delta\bar{r})e,\ \tilde{x}^0(\gamma) = \gamma\sigma^{-1}\Delta\bar{r}.$$

---

[7] *Горелик В. А., Золотова Т. В. Модели оценки коллективного и системного риска. — М.: ВЦ РАН, 2011.*

Таким образом, состав полноразмерного оптимального портфеля с безрисковым кредитом $x^0_{fL}(\gamma)$ можно представить в виде

$$x^0_{fL}(\gamma) = (x^0_0(\gamma), \widetilde{x}^0(\gamma)) = (1 - \gamma(\sigma^{-1}\Delta\bar{r})e, \gamma\sigma^{-1}\Delta\bar{r}). \tag{11}$$

Утверждение 1. Если определитель ковариационной матрицы det $\sigma \neq 0$, то для того, чтобы оптимальный портфель x^0_{fL} был полноразмерным, необходимо и достаточно выполнение условий

$$0 < \gamma < \frac{1}{(\sigma^{-1}\Delta\bar{r})e}, \ \sigma^{-1}\Delta\bar{r} > 0. \tag{12}$$

Доказательство. Неравенство $x^0_{fL}(\gamma) > 0$ (условие полноразмерности оптимального портфеля с безрисковым кредитом) имеет место, согласно (11), если $1 - \gamma(\sigma^{-1}\Delta\bar{r})e > 0$ и $\gamma\sigma^{-1}\Delta\bar{r} > 0$. Второе неравенство равносильно тому, что вектор $\sigma^{-1}\Delta\bar{r} > 0$, следовательно, $(\sigma^{-1}\Delta\bar{r})e > 0$. Тогда первое неравенство $1 - \gamma(\sigma^{-1}\Delta\bar{r})e > 0$ равносильно $0 < \gamma < \frac{1}{(\sigma^{-1}\Delta\bar{r})e}$. Получили условия (12), при которых портфель x^0_{fL} полноразмерный.

Доходность любого оптимального портфеля с ненулевой долей безрискового актива представляет собой линейную комбинацию доходности безрискового актива и рискованной части портфеля, которая является портфелем из множества Парето[8]. Согласно (10), $x^0_0(\gamma)$ и $\widetilde{x}^0(\gamma)e$ есть весовые коэффициенты этой линейной комбинации. Поэтому линейная часть эффективного множества одна и та же для всех инвесторов, и, хотя выбранные портфели будут различными (в зависимости от γ), каждый инвестор выберет одну и ту же комбинацию рискованных ценных бумаг. Отметим, что в ситуации равновесия на фондовом рынке этот рискованный портфель будет полноразмерным[9].

Утверждение 2. Если ковариационная матрица σ строго положительно определена, то ковариация доходностей любых двух оптимальных портфелей с безрисковым кредитом $\mathrm{cov}(r_{x^{01}_{fL}}, r_{x^{02}_{fL}})$ положительна.

Доказательство. При нахождении $\mathrm{cov}(r_{x^{01}_{fL}}, r_{x^{02}_{fL}})$ используются только рискованные части этих портфелей. Но т. к. рискованная часть у всех оптимальных портфелей с безрисковым кредитом отличается коэффициентом $\widetilde{x}^0(\gamma)e$, то в результате имеем ковариацию доходности одного и того же эффективного рискованного портфеля. Коэффициент корреляции одного и того же портфеля равен единице, поэтому ковариация равна дисперсии этого рискованного портфеля, т. е. положительна.

Утверждение 3. Если ковариационная матрица σ строго положительно определена, то ковариация доходностей двух оптимальных портфелей $\mathrm{cov}(r_{x^{01}_{fL}}, r_{x^{02}})$, один из которых x^{01}_{fL} с безрисковым кредитом, а второй x^{02} содержит только рискованные ценные бумаги, положительна.

Доказательство. При нахождении $\mathrm{cov}(r_{x^{01}_{fL}}, r_{x^{02}})$ используется рискованная часть портфеля x^{01}_{fL}. Приходим к тому, что вычисляется ковариация двух оптимальных рискованных портфелей, а ковариация таких портфелей положительна.

---

[8] *См.: Шарп У., Александер Г., Бейли Дж. Инвестиции / Пер. с англ. А. Н. Буренина, А. А. Васина. — М.: ИНФРА-М, 2004.*

[9] *Там же.*

КОВАРИАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДОХОДНОСТЕЙ ОПТИМАЛЬНЫХ ПОРТФЕЛЕЙ РАЗНЫХ ИНВЕСТОРОВ ПРИ НАЛИЧИИ БЕЗРИСКОВОГО ЗАИМСТВОВАНИЯ

Рассмотрим ситуацию, когда инвестор может неограниченно занимать деньги под безрисковую ставку r_{n+1}. Обозначим x_{n+1} долю займа от своего начального капитала, которую инвестор рассчитывает вложить в рискованные финансовые инструменты. Тогда сумма долей средств, вкладываемых в эти инструменты, равна сумме единицы и доли займа. Заметим, что теоретически доля займа может быть больше единицы, т. е. величина начального капитала значения не имеет и может быть сколь угодно мала. С учетом уплаты процентов по займу, задача определения оптимального портфеля формализуется следующим образом:

$$\max_{x\in X_{fB}}\left[\sum_{i=1}^{n}\bar{r}_i x_i - r_{n+1}x_{n+1} - \alpha\sum_{i,j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j\right], \tag{13}$$

где $X_{fB} = \{x|x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n+1, \sum_{i=1}^{n} x_i - x_{n+1} = 1\}$.

Условия оптимальности полноразмерного портфеля приводят к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\bar{r}_i - 2\alpha\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_j^0 = r_{n+1},\ i = 1, \ldots, n, \sum_{j=1}^{n}x_j^0 - x_{n+1}^0 = 1. \tag{14}$$

Представим систему (14) в виде

$$\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_j^0 = \frac{1}{2\alpha}(\bar{r}_i - r_{n+1}),\ i = 1, \ldots, n, \sum_{j=1}^{n}x_j^0 - x_{n+1}^0 = 1. \tag{15}$$

Введем обозначение $\hat{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, $\delta\bar{r} = (\bar{r}_1 - r_{n+1}, \ldots, \bar{r}_n - r_{n+1})$. Тогда система (15) примет вид

$$\sigma\hat{x}^0 = \beta\delta\bar{r},\ \hat{x}^0 e - x_{n+1}^0 = 1. \tag{16}$$

Если σ невырождена, то из (16) получаем $\hat{x}^0(\gamma) = \gamma\sigma^{-1}\delta\bar{r}$, $x_{n+1}^0 = \gamma(\sigma^{-1}\delta\bar{r})e - 1$.

Таким образом, состав полноразмерного оптимального портфеля с безрисковым заимствованием $x_{fB}^0(\gamma)$ при наличии начального капитала инвестора можно представить в виде

$$x_{fB}^0(\gamma) = (\hat{x}^0(\gamma), x_{n+1}^0(\gamma)) = (\gamma\sigma^{-1}\delta\bar{r}, \gamma(\sigma^{-1}\delta\bar{r})e - 1). \tag{17}$$

Утверждение 4. Если определитель ковариационной матрицы $\det \sigma \neq 0$, то для того, чтобы оптимальный портфель x_{fB}^0 был полноразмерным, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\gamma > \frac{1}{(\sigma^{-1}\delta\bar{r})e},\ \sigma^{-1}\delta\bar{r} - 1 > 0. \tag{18}$$

Доказательство. Из (17) следует, что условие полноразмерности такого портфеля $x_{fB}^0(\gamma) > 0$ имеет место, если $\gamma\sigma^{-1}\delta\bar{r} > 0$ и $\gamma(\sigma^{-1}\delta\bar{r})e - 1$. Первое неравенство равносильно тому, что вектор $\sigma^{-1}\delta\bar{r} > 0$, следовательно, $(\sigma^{-1}\delta\bar{r})e > 0$. Тогда второе неравенство $\gamma(\sigma^{-1}\delta\bar{r})e - 1 > 0$ равносильно $\gamma > \frac{1}{(\sigma^{-1}\delta\bar{r})e}$. Получили условия (18), при которых портфель x^0_{fB} полноразмерный.

Доходность любого оптимального портфеля с ненулевой долей безрискового заимствования представляет собой линейную комбинацию доходности рискованной части портфеля, которая тоже является портфелем из множества Парето, и ставки безрискового заимствования. При этом рискованный портфель совпадает с рискованным портфелем линейной комбинации с безрисковым активом, если $r_0 = r_{n+1}$. Согласно (17), $\hat{x}^0(\gamma)e$ и $x^0_{n+1}(\gamma)$ есть весовые коэффициенты этой линейной комбинации. Полученная в связи с этим линейная часть эффективного множества одна и та же для всех инвесторов, осуществляющих безрисковое заимствование, и, хотя выбранные портфели будут различными (в зависимости от γ), каждый инвестор выберет одну и ту же комбинацию рискованных ценных бумаг.

Утверждение 5. Если ковариационная матрица σ строго положительно определена, то ковариация доходностей любых двух оптимальных портфелей с безрисковым заимствованием $\mathrm{cov}(r_{x^{01}_{fB}}, r_{x^{02}_{fB}})$ положительна.

Доказательство. При нахождении $\mathrm{cov}(r_{x^{01}_{fB}}, r_{x^{02}_{fB}})$ используются только рискованные части этих портфелей. Но т. к. рискованная часть у всех оптимальных портфелей с безрисковым кредитом отличается коэффициентом $\hat{x}^0(\gamma)e$, то в результате имеем ковариацию доходности одного и того же эффективного рискованного портфеля. Коэффициент корреляции одного и того же портфеля равен единице, поэтому ковариация равна дисперсии этого рискованного портфеля, т. е. положительна.

Утверждение 6. Если ковариационная матрица σ строго положительно определена, то ковариация доходностей двух оптимальных портфелей $\mathrm{cov}(r_{x^{01}_{fB}}, r_{x^{02}})$, один из которых x^{01}_{fB} с безрисковым займом, а второй x^{02} содержит только рискованные ценные бумаги, положительна.

Доказательство. При нахождении $\mathrm{cov}(r_{x^{01}_{fB}}, r_{x^{02}})$ используется рискованная часть портфеля x^{01}_{fB}. Приходим к тому, что вычисляется ковариация двух оптимальных рискованных портфелей, а ковариация таких портфелей положительна.

Утверждение 7. Если ковариационная матрица σ строго положительно определена, то ковариация доходностей двух оптимальных портфелей $\mathrm{cov}(r_{x^{01}_{fL}}, r_{x^{02}_{fB}})$, один из которых x^{01}_{fL} с безрисковым активом, а второй x^{02}_{fB} с безрисковым займом, положительна.

Доказательство. При нахождении $\mathrm{cov}(r_{x^{01}_{fL}}, r_{x^{02}_{fB}})$ используются только рискованные части портфелей x^{01}_{fL} и x^{02}_{fB}. Приходим к тому, что вычисляется ковариация двух оптимальных рискованных портфелей, а ковариация таких портфелей положительна.

КОВАРИАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДОХОДНОСТЕЙ ПОРТФЕЛЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ ВОЗМОЖНОСТИ БЕЗРИСКОВОГО ЗАИМСТВОВАНИЯ, КРЕДИТОВАНИЯ, КОРОТКИХ ПРОДАЖ

Пусть инвестор может подавать заявку на продажу ценных бумаг без покрытия или на короткие продажи. Такая продажа совершается путем займа ценных бумаг или сертификатов на них для использования в первоначальной сделке, а затем погашения займа такими же ценными бумагами, приобретенными в последующей сделке.

При наличии коротких продаж имеет место тот же результат — положительность ковариации оптимальных портфелей, но доказательство его проще, т. к. в этом случае отсутствует условие неотрицательности вектора рискованной части портфеля.

Задача определения оптимального портфеля при наличии возможности безрискового заимствования, кредитования, коротких продаж имеет вид

$$\max_{x \in X_{fLBS}} [r_0 x_0 + \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i - r_{n+1} x_{n+1} - \alpha \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j], \quad (19)$$

где $X_{fLBS} = \{x | x_0 \geq 0, x_{n+1} \geq 0, \sum_{i=0}^{n} x_i - x_{n+1} = 1\}$.

Утверждение 8. Если определитель ковариационной матрицы $\det \sigma \neq 0$, то ковариация доходностей любых двух оптимальных портфелей с безрисковым заимствованием, кредитованием, короткими продажами положительна.

Доказательство. При наличии коротких продаж любой оптимальный портфель полноразмерен, поэтому в данном случае утверждение сводится к свойству положительной ковариации доходностей полноразмерных портфелей. Доказательства положительности ковариации при наличии коротких продаж, безрискового кредитования или безрискового заимствования те же, что в утверждениях 2 и 5.

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТРАТЕГИИ ИНВЕСТОРА

Рассмотрим одного инвестора, который не только располагает собственной субъективной информацией о ситуации на фондовом рынке, но и имеет возможность на основе этой информации строить различные прогнозы цен (доходностей) финансовых инструментов.

Пусть $\bar{r}(y)$ — вектор математических ожиданий доходностей финансовых инструментов, зависящий от значения внешних (неконтролируемых) факторов y, описание которых включает указание вида неконтролируемых факторов и информированности о них инвестора (например, законы распределения случайных параметров, область значений неопределенных факторов, схемы передачи информации в системе, процедуры обработки информации). Ковариационная матрица по-прежнему считается единой для всех инвесторов. Тогда задача (1) примет вид

$$\max_{x \in X} [\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i(y) x_i - \alpha \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j], \quad (20)$$

а состав оптимального полноразмерного портфеля имеет вид

$$x^0(\gamma, y) = C_0 + C_1(y)\gamma, \quad (21)$$

где $C_0 = \dfrac{\sigma^{-1}e}{e\sigma^{-1}e}$, $C_1 = \sigma^{-1}\bar{r}(y) - \dfrac{e\sigma^{-1}\bar{r}(y)}{e\sigma^{-1}e}\sigma^{-1}e$.

Значит, согласно (20) и (21) оптимальное управление инвестора (состав портфеля) зависит теперь не только от отношения инвестора к риску (выбор параметра γ), но и от предполагаемого инвестором сценария развития экономической ситуации, характеризуемой информацией о значениях внешних факторов y (например, цена на нефть, валютный курс, рост ВВП и др.). Для двух сценариев имеем два вектора значений внешних факторов y^1 и y^2 и, соответственно, две оценки вектора математических ожиданий доходностей $\bar{r}(y^1)$ и $\bar{r}(y^2)$. Примером может служить многофакторная модель[10].

[10] *См.: Шарп У., Александер Г., Бейли Дж. Инвестиции / Пер. с англ. А. Н. Буренина, А. А. Васина. — М.: ИНФРА-М, 2004.*

Тогда составы двух оптимальных полноразмерных портфелей одного инвестора согласно (10) есть $x^0(\gamma, y^1) = C_0 + C_1(y^1)\gamma$ и $x^0(\gamma, y^2) = C_0 + C_1(y^2)\gamma$.

Оценим ковариацию случайных величин доходностей двух разных портфелей одного инвестора, имеющих составы $x(\gamma, y^1)$ и $x(\gamma, y^2)$. По формуле (3) имеем

$$\mathrm{cov}(r_{x(\gamma, y^1)}(y^1), r_{x(\gamma, y^2)}(y^2)) = x(\gamma, y^1)\sigma x(\gamma, y^2). \tag{22}$$

Можно считать оптимальное управление $x^0(y)$ (состав портфеля) инвестора устойчивым, если в пределах изменения информации (прогноза) корреляция портфелей остается положительной. Отметим, что в случае оценки риска фондового рынка в целом положительная ковариация портфелей разных инвесторов служит фактором неустойчивости рынка[11]. Положительная же ковариация разных портфелей одного инвестора говорит об устойчивости управления конкретного инвестора, т. е. при рассматриваемых сценариях развития экономической ситуации случайные значения доходностей его портфелей имеют тенденцию меняться в одну сторону, и инвестор будет застрахован от потерь, вызванных ошибочным прогнозом.

Из формулы (6) следует, что если определитель ковариационной матрицы $\det \sigma \neq 0$, то ковариация $\mathrm{cov}(r_{x^0(\gamma, y^1)}(y^1), r_{x^0(\gamma, y^2)}(y^2))$ двух полноразмерных оптимальных портфелей $x^0(\gamma, y^1)$ и $x^0(\gamma, y^2)$ инвестора положительна для $\bar{r}(y^1)$, $\bar{r}(y^2)$ и σ, удовлетворяющих условию

$$(e\sigma^{-1}\bar{r}(y^1))(e\sigma^{-1}\bar{r}(y^2)) - (\bar{r}(y^1)\sigma^{-1}\bar{r}(y^2))(e\sigma^{-1}e) < \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2. \tag{23}$$

ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ ФОНДОВОГО РЫНКА

Как вытекает из результатов анализа, оптимальные портфели имеют положительную корреляцию, причем чем ближе значения коэффициентов γ инвесторов, т. е. сходно их отношение к риску, тем ближе к единице коэффициенты корреляции их портфелей. В отличие от равновесной модели CAPM, в которой тоже исследуется коллективное поведение инвесторов, в нашей работе рассматриваются вопросы снижения коллективного риска на фондовом рынке вне ситуации равновесия. В зависимости от характера переходных процессов (скорости, амплитуды) могут возникнуть значительные колебания рынка, а в поведении инвесторов — известный в теории игр эффект толпы (например, массовый переход в кэш), что может привести (как и было недавно) к обвалу. Поэтому положительная корреляция случайных величин доходностей — один из существенных факторов неустойчивости.

Так как инвесторы не обязаны вести себя на фондовом рынке оптимально (например, согласно (1)), то их портфели могут быть коррелированы как положительно, так и отрицательно. Таким образом, однотипное поведение инвесторов может вызывать большие колебания рынка, а разнотипное гасит колебания рынка, т. е. хеджирует коллективный риск. Поэтому для оценки и прогнозирования коллективного риска нами ранее была введена мера разнообразия портфелей, основанная на понятии энтропии рынка[12]. Чем больше значение энтропии, тем больше разнообразие портфелей и меньше коллективный риск на фондовом рынке.

---

[11] *См.: Горелик В. А., Золотова Т. В. Оценка корреляции доходности инвестиционных портфелей и устойчивость фондового рынка // Государственный университет Минфина России. Финансовый журнал. — 2012. — № 3. — С. 43–52.*

[12] *Там же.*

Как известно, систематический (или рыночный) риск фондового рынка определяется предельным значением средней ковариации доходностей финансовых инструментов[13]. Эта величина не зависит от распределения финансовых инструментов (ценных бумаг) по инвестиционным портфелям. На реальном фондовом рынке все финансовые инструменты принадлежат инвесторам, т. е. распределены по портфелям. Поэтому предельное значение средней ковариации ценных бумаг можно считать оценкой риска неструктурированного рынка.

В качестве меры (показателя) риска структурированного фондового рынка может также служить средняя ковариация портфелей. Пусть N — общее количество портфелей (или инвесторов), присутствующих на рынке. Дисперсия средней доходности портфелей, т. е. дисперсия величины $r_{cp}^{p} = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} r^{m}$ имеет вид

$$Dr_{cp}^{p} = \frac{1}{N}\bar{\sigma}_N^2 + \frac{1}{N^2}(N^2 - N)\overline{\mathrm{cov}}_N,$$

где $\bar{\sigma}_N^2 = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} Dr_{x^m}$ — средняя дисперсия портфелей,

$\overline{\mathrm{cov}}_N$ — средняя ковариация портфелей.

$$\overline{\mathrm{cov}}_N = \frac{1}{N^2 - N}\sum_{s,\, m=1,\, s \neq m}^{N} \mathrm{cov}(r_{x^s}, r_{x^m}). \tag{24}$$

Если $\bar{\sigma}_N^2 \le A$ и $\overline{\mathrm{cov}}_N \to B$ при $N \to \infty$, то имеем $\frac{1}{N}\bar{\sigma}_N^2 \to 0$ и $Dr_{cp}^{p} \to B$ при $N \to \infty$. Значит, если $B = 0$ то диверсификацией с достаточно большим N значение Dr_{cp}^{p} можно сделать сколь угодно малым. Однако при однотипном (оптимальном по Марковицу) поведении инвесторов доходности их портфелей положительно коррелированы, поэтому $B > 0$, и риск структурированного рынка неустраним. При разнотипном поведении доходности портфелей инвесторов могут быть коррелированы отрицательно, что приводит к хеджированию коллективного риска: колебания рынка гасятся, и он возвращается в прежнее положение равновесия.

Для оценки устойчивости рынка как с помощью энтропии, так и с помощью средней ковариации $\overline{\mathrm{cov}}_N$ требуется знание составов портфелей x, обращающихся на фондовом рынке в данный момент. Однако только при расчете $\overline{\mathrm{cov}}_N$ составы портфелей x участвуют непосредственно. Этот факт характеризует среднюю ковариацию портфелей как более тонкую оценку устойчивости (риска) по сравнению с энтропией, характеризующей степень разнообразия портфелей, где для расчета берутся лишь доли портфелей от их общего числа в каждом классе портфелей[14].

Рассмотрим на примере полноразмерных оптимальных портфелей, как изменится значение средней ковариации, если количество портфелей на рынке увеличилось на единицу. Предположим, что ковариационная матрица σ строго положительно определена. Из формулы (3) вытекает, что $\mathrm{cov}(r_{x^{0s}}, r_{x^{0m}}) = C_0\sigma C_0 + C_1\sigma C_1\gamma_s\gamma_m$,

---

[13] *См., например: Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 1: Факты. Модели. — М.: ФАЗИС, 1998.*

[14] *См.: Горелик В. А., Золотова Т. В. Оценка корреляции доходности инвестиционных портфелей и устойчивость фондового рынка // Государственный университет Минфина России. Финансовый журнал. — 2012. — № 3. — С. 43–52.*

где $C_0\sigma C_0=(e\sigma^{-1}e)^{-1} > 0$, а $C_1\sigma C_1 > 0$. Тогда по формуле (24) при $N + 1$ портфелей их средняя ковариация (после преобразования)

$$\overline{\mathrm{cov}}_{N+1} = \overline{\mathrm{cov}}_N + \frac{2C_1\sigma C_1}{(N-1)N(N+1)}((N-1)\sum_{m=1}^{N}\gamma_{N+1}\gamma_m - \sum_{s,\,m=1,\,s\neq m}^{N}\gamma_s\gamma_m).$$

Значит, $\overline{\mathrm{cov}}_{N+1} < \overline{\mathrm{cov}}_N$, если $(N-1)\sum_{m=1}^{N}\gamma_{N+1}\gamma_m - \sum_{s,\,m=1,\,s\neq m}^{N}\gamma_s\gamma_m) < 0$,

т. е. $\gamma_{N+1} < \frac{1}{(N-1)}\min_{m=1,\ldots,N}\sum_{s=1,\,s\neq m}^{N}\gamma_s$.

Таким образом, если на фондовом рынке появляется оптимальный полноразмерный портфель, коэффициент риска которого $\gamma_{N+1} < \frac{1}{(N-1)}\min_{m=1,\ldots,N}\sum_{s=1,\,s\neq m}^{N}\gamma_s$, то средняя ковариация полноразмерных оптимальных портфелей уменьшается. При этом фондовый рынок становится более устойчивым. Наоборот, появление оптимального полноразмерного портфеля, коэффициент риска которого $\gamma_{N+1} \geq \frac{1}{(N-1)}\sum_{m=1}^{N}\gamma_m$, увеличивает среднюю ковариацию портфелей, и рынок становится менее устойчивым.

Рассмотрим в качестве примера широко используемую рыночную модель[15], которая предполагает, что математические ожидания доходностей $\bar{r}_i$ финансовых инструментов за данный период времени связаны с математическим ожиданием доходности рыночного индекса за данный период соотношением $\bar{r}_i = a_{iI} + \beta_{iI}\bar{r}_I$, $i = 1, \ldots, n$, где a_{iI} — коэффициент смещения, β_{iI} — коэффициент наклона (бета-коэффициент), $\bar{r}_I$ — математическое ожидание доходности рыночного индекса I. Оптимальный полноразмерный портфель, определяемый из решения задачи (1), имеет вид

$$x^0(\gamma, \bar{r}_I) = C_0 + C_1\gamma = \frac{\sigma^{-1}e}{e\sigma^{-1}e} + (\sigma^{-1}(a_I + \beta_I\bar{r}_I) - \frac{e\sigma^{-1}(a_I + \beta_I\bar{r}_I)}{e\sigma^{-1}e}\sigma^{-1}e)\gamma, \tag{25}$$

где $a_I = (a_{1I}, \ldots, a_{nI})$, $\beta_I = (\beta_{1I}, \ldots, \beta_{nI})$.

Пусть инвесторы руководствуются субъективной информацией относительно величины $\bar{r}_I$. Из формулы (3) получаем выражение для ковариации случайных величин доходностей любых двух портфелей $x^0(\gamma_s, \bar{r}_{I,s})$ и $x^0(\gamma_m, \bar{r}_{I,m})$, $s, m = 1, \ldots, N$, $s \neq m$ и вычисляем по формуле (24) среднюю ковариацию портфелей:

$$\overline{\mathrm{cov}}_N = \frac{1}{e\sigma^{-1}e} + \\ + \frac{\sum_{s,\,m=1,\,s\neq m}^{N}((a_I + \beta_I\bar{r}_{I,s}) - \frac{e\sigma^{-1}(a_I + \beta_I\bar{r}_{I,s})}{e\sigma^{-1}e}e)\sigma^{-1}((a_I + \beta_I\bar{r}_{I,m}) - \frac{e\sigma^{-1}(a_I + \beta_I\bar{r}_{I,m})}{e\sigma^{-1}e}e)\gamma_s\gamma_m}{N^2 - N}. \tag{26}$$

При условии строгой положительной определенности ковариационной матрицы σ доказано, что при больших значениях $\bar{r}_{I,s}$ и $\bar{r}_{I,m}$ имеем $\overline{\mathrm{cov}}_N >> 0$; а при $\bar{r}_{I,s}$ и $\bar{r}_{I,m} \to 0$ имеем $\overline{\mathrm{cov}}_N > 0$. Поэтому при прогнозе быстро растущего рынка поведение инвесторов приводит к высокой вероятности кризисных явлений. При прогнозе падения

[15] *См.: Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики./ Том 1: Факты. Модели. — М.: ФАЗИС, 1998.*

рынка вероятность кризисных явлений также значительна. При умеренных значениях $\bar{r}_{I,s}$, $\bar{r}_{I,m}$ имеем относительно устойчивое состояние рынка. При одинаковых оценках всеми инвесторами значений доходности индекса $\bar{r}_{I,s} = \bar{r}_{I,m} = \bar{r}_I$, $s, m = 1, \ldots, N$, $s \neq m$ имеем $\overline{\mathrm{cov}}_N > 0$. Значит, если различное поведение инвесторов связано только лишь с различным отношением к риску (выбор параметра γ), то средняя ковариация случайных значений доходностей портфелей, определяемая соотношением (26), всегда положительная, что согласуется со свойством положительной ковариации доходностей оптимальных портфелей.

Проведенное исследование показывает, что однотипное поведение инвесторов (оптимизация портфеля при одинаковой информированности) даже при разном отношении к риску служит фактором неустойчивости фондового рынка. С другой стороны, инвесторы, придерживаясь различных прогнозов развития фондового рынка, вследствие различной их информированности (более или менее информированы, по-разному информированы), будут выбирать разные стратегии (портфели) и тем самым обеспечивать устойчивость фондового рынка. При этом средняя ковариация доходностей портфелей инвесторов является приближенным значением дисперсии рыночной доходности и может быть принята в качестве оценки риска структурированного рынка (состоящего из большого числа портфелей).

Формализация проблемы формирования оптимального портфеля ценных бумаг с учетом возможности инвесторов проводить операции безрискового заимствования, кредитования, коротких продаж позволяет более адекватно описывать процессы, происходящие на фондовом рынке, и, следовательно, более точно прогнозировать коллективный риск.

Библиография

1. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей. — М.: КноРус, 2010. — 658 с.
2. Горелик, В. А., Золотова, Т. В. Модели оценки коллективного и системного риска. — М.: ВЦ РАН, 2011. — 163 с.
3. Горелик, В. А., Золотова, Т. В. Оценка корреляции доходности инвестиционных портфелей и устойчивость фондового рынка // Государственный университет Минфина России. Финансовый журнал. — 2012. — № 3. — С. 43–52.
4. Горелик, В. А., Золотова, Т. В. Некоторые вопросы оценки корреляции доходностей инвестиционных портфелей // Проблемы управления. — 2011. — № 3. — С. 36–42.
5. Шарп, У., Александер, Г., Бейли, Дж. Инвестиции / Пер. с англ. А. Н. Буренина, А. А. Васина. — М.: ИНФРА-М, 2004. — 1028 с.
6. Ширяев, А. Н. Основы стохастической финансовой математики / Том 1. Факты. Модели. — М.: ФАЗИС, 1998. — 512 с.
7. Markowitz, H. M. Portfolio selection // Journal of Finance. — 1952. — № 7. — P. 77–91.